Lista 1
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II°

dr Bartosz Kwaśniewski

Zadanie 1. *Niech T będzie przedziałem prostej. Udowodnij, że jeżeli procesy stochastyczne $(X_t)_{t\in T}$ $(Y_t)_{t\in T}$ są równoważne i prawostronnie ciągłe, to są nierozróżnialne.*

Definicja 1. *Niech $(X_t)_{t\in T}$ będzie procesem zespolonym.*

Wartością oczekiwaną (funkcją wartości oczekiwanej) procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in T}$ rzędu pierwszego nazywamy funkcję

$$T \ni t \mapsto m_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} E(X_t).$$

Wariancją (funkcją wariancji) procesu Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy funkcję

$$T \ni t \mapsto \sigma_X^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E((X_t - m_X(t))(\overline{X_t - m_X(t)})).$$

Autokowariancją (funkcją autokowariancji) procesu stochastycznego Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy funkcję

$$T \times T \ni (t_1, t_2) \mapsto K_X(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E((X_{t_1} - m_X(t_1)(\overline{X_{t_2} - m_X(t_2)})).$$

Autokorelacją (funkcją autokorelacją) procesu Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy funkcję

$$T \times T \ni (t_1, t_2) \mapsto \overline{K}_X(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(X_{t_1}\overline{X_{t_2}}) \equiv \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_X^2(X_{t_1})\sigma_X^2(X_{t_2})}}.$$

Uwaga 1. *Rozpatruje się też funkcję*

$$T \times T \ni (t_1, t_2) \mapsto \widetilde{K}_X(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E(X_{t_1}\overline{X_{t_2}}).$$

Definicja 2. *Niech $(X_t)_{t\in T}$ $(Y_t)_{t\in T}$ będą zespolonymi procesami Hilberta. Funkcją kowariancji tych procesów nazywamy funkcję*

$$T \times T \ni (t_1, t_2) \mapsto K_{X,Y}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E([X_{t_1} - m_X(t_1))]\overline{[Y_{t_2} - m_Y(t_2))]}).$$

Zadanie 2. *Niech $(X_t)_{t\in T}$ będzie zespolonym procesem Hilberta. Udowodnij, że*

$$\forall_{t\in T} \quad K_X(t,t) = \sigma_X^2(t) \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\forall_{t_1,t_2\in T} \quad K_X(t_2, t_1) = \overline{K_X(t_1, t_2)}, \tag{2}$$

$$\forall_{t_1,t_2\in T} \quad |K_X(t_1, t_2)|^2 \leqslant K_X(t_1, t_1)K_X(t_2, t_2). \tag{3}$$

Jeżeli dodatkowo $(X_t)_{t\in T}$ jest procesem rzeczywistym, to

$$\forall_{t_1,t_2\in T} K_X(t_2, t_1) = K_X(t_1, t_2). \tag{4}$$

Zadanie 3. *Udowodnij, że funkcja autokowariancji $K\colon T \times T \to \mathbb{C}$ pewnego procesu stochastycznego spełnia warunek*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{t_1,t_2,\ldots,t_n\in T}\forall_{z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}} \sum_{k,l=1}^{n} K(t_k, t_l) z_k \overline{z_l} \geqslant 0.$$

Zadanie 4. *Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = At^2 - 2Bt$ *i* (A, B) *jest wektorem losowym o rozkładzie* $P(\{A = \pm 1; B = \pm 1\}) = 0{,}25$*. Narysuj dwie przykładowe trajektorie i oblicz charakterystyki liczbowe procesu.*

Zadanie 5. *Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = t^2 - Yt$*. Dla ustalonego* t *znajdź rozkład* U_t*, jeśli* Y *ma rozkład jednostajny na odcinku* $[0, 1]$*. Oblicz charakterystyki liczbowe procesu.*

Zadanie 6. *Niech* $Y \sim U[0, 1]$*. Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = Y \cos(at)$*,* $a \in \mathbb{R}$*. Oblicz* $E[U_t]$ *oraz charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 7. *Dany jest proces stochastyczny* $(X_t)_{t>0}$*, gdzie* $X_t = tU + V$ *i* U *i* Y *są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z jednakowym parametrem* λ*. Oblicz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t>0}$*.*

Zadanie 8. *Dla procesu z poprzedniego zadania wyznacz rozkłady jednowymiarowe.*

Zadanie 9. *Zmienna losowa* X *ma rozkład normalny* $\mathcal{N}(m, \sigma)$*, stała* $b \in \mathbb{R}$*. Podaj gęstości jednowymiarowe i policz funkcje kowariancji dla procesu* $(U_t)_{t>0}$*, gdzie* $U_t = X_t + b$*.*

Zadanie 10. *Dany jest proces* $(Z_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $Z_t = t^2 + Xt + Y$*. Oblicz charakterystyki liczbowe procesu* $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ *jeśli* X *i* Y *są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi.*

Definicja 3. *Procesem Poissona z intensywnością* $\lambda > 0$ *nazywamy proces* $(N_t)_{t\geqslant 0}$ *spełniający następujące warunki:*

1. $N_0 = 0$ *p.n.,*
2. $(N_t)_{t\geqslant 0}$ *ma przyrosty niezależne,*
3. *dla każdej pary* (s, t)*, gdzie* $t > s$ *zmienna losowa* $N_t - N_s$*, ma rozkład Poissona z parametrem* $\lambda(t - s)$*.*

Zadanie 11. *Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu Poissona z intensywnością* $\lambda > 0$*.*

Zadanie 12. *Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = t^3 - Yt$*, gdzie* $Y \sim U[1, 2]$*. Oblicz charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 13. *Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = t^2 - Yt$*, gdzie* $Y \sim U[2, 3]$*. Oblicz charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 14. *Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = \cos(t) - 3tY$*, gdzie* $Y \sim U[3, 4]$*. Oblicz charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 15. *Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = \sin(t) - t^2 Y$*, gdzie* $Y \sim U[2, 3]$*. Oblicz charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 16. *Oblicz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = A\sin(\omega t)$*,* ω *- stała,* A *- zmienna losowa o rozkładzie* $\mathcal{N}(230, 5)$*.*

Zadanie 17. *Oblicz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = At^2$*, gdzie* A *jest zmienną losową skokowa o funkcji prawdopodobieństwa* $P(\{A = \pm 1\}) = 0{,}5$*.*

Zadanie 18. *Oblicz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = At + B$*, gdzie* A *i* B *są zmiennymi losowymi o parametrach* $E(A) = 0$*,* $E(B) = 1$*, i* $D^2(A) = 1$*,* $D^2(B) = 2$*,* $\mathrm{cov}(A, B) = -1$*.*

Zadanie 19. *Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = At^2 + Be^t$*, gdzie* A*,* B *to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach:* $E(A) = 2$*,* $E(B) = -3$*,* $D^2(A) = 1$*,* $D^2(B) = 3$*.*

Zadanie 20. *Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = At + B$*, gdzie* A *i* B *to zmienne losowe o parametrach:* $E(A) = 0$*,* $E(B) = 0$ *i macierzy kowariancji* $K = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}5 \end{bmatrix}$*.*

Zadanie 21. *Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = At + 1$*, gdzie* $A \sim U(0, 1)$*. Jak wyglądają realizacje tego procesu? Które z poniższych funkcji* $x_1(t) = 0{,}3t + 1$*,* $x_2(t) = -0{,}3t + 1$*,* $x_3(t) = 2t + 1$ *są realizacjami tego procesu?*

Zadanie 22. *Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = At - 3$*, gdzie* $A \sim \mathcal{N}(3,1)$*. Jak wyglądają realizacje tego procesu?*

Zadanie 23. *Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = \cos(t+B)$*, gdzie* $B \sim U(-\pi,\pi)$*.*

Zadanie 24. *Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = A\sin(t+B)$*, gdzie zmienne* A *i* B *są niezależne oraz* $A \sim U(-0,5;0,5)$ *i* $B \sim U(-\pi,\pi)$ *.*

Zadanie 25. *Proces* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *ma tylko 3 realizacje:* $x_1(t) = t$*,* $x_2(t) = t+1$*,* $x_3(t) = t+2$*. Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami: 1/2, 1/3; 1/6. Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu procesu.*

Zadanie 26. *Proces* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *ma tylko 4 realizacje:* $x_1(t) = t$*,* $x_2(t) = t+1$*,* $x_3(t) = t+2$*,* $x_4(t) = t-1$*. Realizacja ostatnia jest przyjmowana z prawdopodobieństwem 0,1, a pozostałe realizacje są przyjmowane z takim samym prawdopodobieństwem. Wyznacz charakterystyki liczbowe procesu procesu.*

Zadanie 27. *Wyznacz charakterystyki liczbowe* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = Ae^t + Be^{-t}$*, a* A *i* B *to zmienne losowe o parametrach:* $E(A) = 0$*,* $E(B) = 0$*, i* $D^2(A) = 1$*,* $D^2(B) = 2$*,* $\operatorname{cov}(A,B) = -1$*.*

Zadanie 28. *Wyznacz charakterystyki liczbowe* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = A + Bt$*, a* A *i* B *to zmienne losowe o parametrach:* $E(A) = -1$*,* $E(B) = 1$*, i* $D^2(A) = 1$*,* $D^2(B) = 4$*,* $\rho(A,B) = -0{,}5$*.*

Zadanie 29. *Wyznacz charakterystyki liczbowe* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = At^2 + B$*, a* A *i* B *to zmienne losowe nieskorelowane.* A *ma rozkład wykładniczy z parametrem 1,5, a* B *jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa:* $P(\{B = \pm 1\}) = 0{,}5$*;*

Zadanie 30. *Dany jest proces* $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $Y_t = f(t)X_t + g(t)$*, a* f *i* g *są funkcjami rzeczywistymi (nielosowymi). Wyraź charakterystyki liczbowe* $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *za pomocą parametrów procesu* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*.*

Zadanie 31. *Rozważmy proces* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, gdzie* $X_t = U$*, a* U *to zmienna losowa. Oblicz*

1. *wartość oczekiwaną, wariancję i kowariancję procesu, jeżeli znane są* $E(U) = m$ *i* $D^2(U) = \sigma^2$*,*
2. *jednowymiarową gęstość i dwuwymiarową dystrybuantę procesu, jeżeli dana jest gęstość* φ *zmiennej losowej* U*.*

Zadanie 32. *Rozważmy proces* $(X_t)_{t>0}$*, gdzie* $X_t = Ut + V$*. Wyznacz:*

1. *wartość oczekiwaną i autokowariancję tego procesu, jeżeli* U *jest zmienną losową dyskretną o rozkładzie* $P(\{U = k\}) = p_k$*,* $k \in \overline{1,n}$*,* $p_k \geqslant 0$*,* $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$*,* $V = 0$*;*
2. *wartość oczekiwaną, autokowariancję i wariancję tego procesu oraz jednowymiarową gęstość procesu, jeżeli* $U \sim \mathcal{N}(m;\sigma)$ *oraz* $V = v$ *jest wielkością nielosową;*
3. *wartość oczekiwaną, autokowariancję, autokorelację i wariancję, jeżeli* U *i* V *są zmiennymi losowymi niezależnymi o znanych parametrach. Jaką postać ma gęstość prawdopodobieństwa procesu, jeśli znane są gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych* U *i* V*:* f_U *i* f_V*;*
4. *wartość oczekiwaną, autokowariancję i wariancję tego procesu, jeżeli* U *i* V *są zmiennymi losowymi, o których wiadomo, że rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej* (U,V) *jest rozkładem normalnym* $\mathcal{N}(m_U, m_V; \sigma_U, \sigma_V, \rho)$*.*

Zadanie 33. *Rozważmy proces stochastyczny* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, a* $X_t = \varphi(t,U)$*, gdzie* φ *- funkcja rzeczywista nielosowa klasy* $C(\mathbb{R})$*,* t *- czas,* U *- zmienna losowa o znanym rozkładzie. Oblicz wartość oczekiwaną, autokowariancję i wariancję tego procesu, gdy:*

1. $\varphi(t,U) = \alpha(t)U + \beta(t)$*,* $\alpha(t)$*,* $\beta(t)$ *są funkcjami nielosowymi i znana jest gęstość zmiennej losowej* U*;*

2. $\varphi(t, U) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t) U_i$; φ_i - *są funkcjami nielosowymi, dla* $i \in \overline{1, N}$, U_i - *elementy* N*-wymiarowej zmiennej losowej* $U = (U_1, \ldots, U_N)$ *o znanych* $E(U_i) = m_i$, *i macierzy kowariancyjnej* $[b_{ik}]$, *gdzie* $b_{ik} = \operatorname{cov}(U_i; U_k)$ *dla* $i, k \in \overline{1, N}$.

Zadanie 34. *Rozważmy proces stochastyczny* $(X_t)_{t \in T}$ *opisujący drgania sinusoidalne, który zapisuje się w postaci:*

$$X_t = U_1 \cos(\Psi t) + U_2 \sin(\Psi t),$$

gdzie U, Φ, Ψ - *zmienne losowe oraz* $U_1 = U \sin(\Phi)$, $U_2 = U \cos(\Phi)$.

1. *Podaj jedno- i dwuwymiarową dystrybuantę procesu, jeśli:* $T = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, *a* $U \sim U([0, 1])$, $\Psi \equiv 1$, $\Phi 0$.
2. *Podaj wartość oczekiwaną procesu, jeśli* (U, Ψ) *jest zmienną losową dwuwymiarową o rozkładzie jednostajnym na obszarze* $[0, 1] \times [0, 1]$, *a* $\Phi \equiv 0$ *jest wielkością nielosową.*
3. *Zbadaj, czy proces jest stacjonarny, jeżeli* $E(U) = 0$, $D^2(U) = \sigma_U^2$, $\Phi \sim U(0; 2\pi)$, $\Psi = a > 0$ *jest wielkością nielosową,* U *i* Φ *są zmiennymi losowymi niezależnymi.*